DM-01-02 ► 試證伯努利不等式 (Bernoulli's inequality)：如果 $h > -1$，則對每一個自然數 n，$(1+h)^n \geq 1+nh$ 成立。如果考慮 $h > 0$ 之情形，則這不等式很明顯是對的，為什麼？

【證明】 令 $A = \{k \in \mathbb{N} \,|\, (1+h)^k \geq 1+kh\text{，且 } h > -1\}$。因為無論 h 之值為何

$$(1+h)^1 = 1+h = 1+1\cdot h$$

恆成立，所以 $1 \in A$。
假設 $k \in A$，即當 $h > -1$ 時，下列式子成立：

$$(1+h)^k \geq 1+kh \tag{1}$$

考慮 $(1+h)^{k+1}$ 並將 (1) 式代入，則

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &= (1+h)(1+h)^k \\ &\geq (1+h)(1+kh) \\ &= [1+(k+1)h]+kh^2\end{aligned}$$

因為 k 為一自然數且 $h^2 \geq 0$，$kh^2 \geq 0$。故

$$(1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h$$

因此，$k+1$ 亦屬於 A。由數學歸納法得證 $A = \mathbb{N}$，即當 $h > -1$ 時，對每一個自然數 n，$(1+h)^n \geq 1+nh$ 恆成立。

當 $h > 0$ 時，由題意知存在其它較簡易的方法可以由觀察得知此一不等式之正確性（而勿須使用數學歸納法）。 令 $n \geq 1$ 為任一自然數。因為 $h > 0$，所以

$$(1+h)^n > (1+h)^{n-1} > (1+h)^{n-2} > \cdots > (1+h)^1 > (1+h)^0 = 1 \tag{2}$$

考慮下列恆等式

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

代入 $a = 1+h$ 與 $b = 1$，且由 (2) 之不等式可得

$$\begin{aligned}(1+h)^n - 1^n &= [(1+h)-1][(1+h)^{n-1}+(1+h)^{n-2}+\cdots+(1+h)^1+(1+h)^0] \\ &\geq h[n(1+h)^0] \\ &= nh\end{aligned}$$

故得證 $(1+h)^n \geq 1+nh$（註：因為 $h > 0$，以上不等式只有當 $n = 1$ 時等號方成立）。
□

賴志松提供