DM-01-03 ► 試證二項式定理 (Binomial Theorem)：

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

對每一自然數 n 皆為真，其中

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \forall 1 \leq k \leq n-1$$

$$\binom{n}{k} \equiv 1, \qquad 當\ k=0\ 或\ k=n$$

【證明】 令 n 為任一自然數。首先我們必須先證明對所有 $0 \leq k \leq n-1$ 而言，

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1}$$

恆成立。當 $k=0$ 時，很顯然 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1+n = \binom{n+1}{1}$。考慮 $1 \leq k \leq n-1$，則

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n![(k+1)+(n-k)]}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

底下我們使用數學歸納法證明二項式定理。當 $n=1$ 時，顯然下列式子成立

$$(a+b)^1 = (a+b) = \binom{1}{0}a^{1-0}b^0 + \binom{1}{1}a^{1-1}b^1$$

假設 $n=k \geq 1$ 時，此一定理敘述為真，即

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i \tag{2}$$

考慮 $n=k+1$ 的情形並將 (2) 式代入，再利用 (1) 式化簡可得

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
&= (a+b)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i \\
&= a\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i + b\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1}b^0+\binom{k}{1}a^kb^1+\binom{k}{2}a^{k-1}b^2+\cdots+\binom{k}{k-1}a^2b^{k-1}+\binom{k}{k}a^1b^k \\
&\quad +\binom{k}{0}a^kb^1+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\binom{k}{2}a^{k-2}b^3+\cdots+\binom{k}{k-1}a^1b^k+\binom{k}{k}a^0b^{k+1} \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1}b^0+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{0}\right]a^kb^1+\left[\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2+\cdots \\
&\quad +\left[\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}\right]a^1b^k+\binom{k}{k}a^0b^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}a^{(k+1)}b^0+\binom{k+1}{1}a^{(k+1)-1}b^1+\binom{k+1}{2}a^{(k+1)-2}b^2+\cdots \\
&\quad +\binom{k+1}{k}a^{(k+1)-k}b^k+\binom{k+1}{k+1}a^{(k+1)-(k+1)}b^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{(k+1)-i}b^i
\end{aligned}
$$

故得證。 $\square$

賴志松提供