DM-01-06 ► 試證對每一個自然數 n

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

為一自然數。

【證明】 令 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ 且 $A=\{n\in\mathbb{N}\,|\,F_n\in\mathbb{N}\}$。因

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}{2}\right]\\ &= 1\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

故 $1\in A$。
底下我們考慮使用完全歸納法來證明。假設 $1,2,\ldots,k\in A$，即對任一 $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ 而言

$$F_i=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right]$$

均為自然數。則

$$\begin{aligned}F_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]\\ &= F_k+F_{k-1}\end{aligned}$$

因為 $F_k,F_{k-1}\in\mathbb{N}$，所以 $F_{k+1}=F_k+F_{k-1}\in\mathbb{N}$。故 $k+1\in A$。由完全歸納法得證 $A=\mathbb{N}$，即對所有自然數 n 而言，F_n 亦為一自然數。 □

賴志松提供