DM-01-07 ► 對每一個自然數 n，定義

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

H_n 稱為一個調合數 (harmonic number)。試證明對每一個自然數 n，

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$$

【證明】 令 $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n\}$。因 $H_1 = 1$，所以 $\sum_{k=1}^{1} H_k = H_1 = 1 = (1+1)H_1 - 1$。故 $1 \in A$。
假設 $m \geq 1$ 且 $m \in A$，即

$$\sum_{k=1}^{m} H_k = (m+1)H_m - m$$

成立。則

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} H_k &= \sum_{k=1}^{m} H_k + H_{m+1} \\
&= [(m+1)H_m - m] + H_{m+1} \\
&= (m+1)[H_{m+1} - \frac{1}{m+1}] - m + H_{m+1} \\
&= (m+1)H_{m+1} - 1 - m + H_{m+1} \\
&= [(m+1)+1]H_{m+1} - (m+1)
\end{aligned}$$

故 $m+1 \in A$。由數學歸納法得證 $A = \mathbb{N}$，即對所有自然數 n 而言，$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$ 恆成立。 □

賴志松提供