DM-01-09 ► 試求 Diophantine 方程式 $6x+10y=104$ 的所有非負整數解。

【解】 根據題意，即求

$$3x+5y=52 \tag{1}$$

的所有非負整數解。首先利用輾轉相除法求 $\gcd(3,5)=1$ 如下：

$$\begin{aligned} 5 &= 3\cdot 1+2 \\ 3 &= 2\cdot 1+1 \\ 2 &= 1\cdot 2+0 \end{aligned}$$

反推回去，其過程如下：

$$\begin{aligned} 1 &= 3-2\cdot 1 \\ &= 3-(5-3\cdot 1)\cdot 1 \\ &= 3\cdot 2+5\cdot(-1) \end{aligned}$$

所以得

$$3\cdot 2+5\cdot(-1)=1$$

等號兩邊乘以 52 得

$$3\cdot 104+5\cdot(-52)=52$$

故 $(x_0=104, y_0=-52)$ 為 (1) 式一組整數解。因為 $\gcd(3,5)=1$，利用定理 5 知 (1) 式之所有整數解的集合為

$$S=\{(x,y)\,|\,x=104-5k, y=-52+3k, k\in\mathbb{Z}\}$$

底下我們求 (1) 式的所有非負整數解，即 $x=104-5k\geq 0$ 且 $y=-52+3k\geq 0$。則

$$k\leq\frac{104}{5} \text{ 且 } k\geq\frac{52}{3}$$

因 $k\in\mathbb{Z}$，所以

$$18=\left\lceil\frac{52}{3}\right\rceil\leq k\leq\left\lfloor\frac{104}{5}\right\rfloor=20$$

故 (1) 式的所有非負整數解共有三組如下：

$$\begin{cases} (x=14, y=2) & \text{當 } k=18 \\ (x=9, y=5) & \text{當 } k=19 \\ (x=4, y=8) & \text{當 } k=20 \end{cases}$$

□

賴志松提供