DM-02-05 ► 假設有 n 個球迷為其優勝球隊喝采而將所戴帽子拋到空中； 如果帽子是隨機地掉回每一球迷手中，試問
(a) 恰有 k 個球迷拿到他們自己所戴帽子的情況有多少種？
(b) 每位球迷所拿到的帽子皆非自己所拋的帽子，其情況有多少種？

【解】 (a) 根據題意知，每一個球迷恰分配到一個帽子。因此若恰有 k 個球迷拿到他們自己所戴的帽子，則表示有 $n-k$ 個球迷拿到別人的帽子。而從 n 個球迷中取出 k 個球迷的方式有

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}。$$

針對其中每一方式，我們令 $S=\{p_1,p_2,\ldots,p_{n-k}\}$ 表示那些拿到別人的帽子之球迷所成的集合。且令 a_i 表示「p_i 拿到自己所戴的帽子」，則 a_i' 表示「p_i 拿到別人的帽子」，其中 $i=1,2,\ldots,n-k$。則題意所求即為 $C(n,k)\cdot N(a_1'a_2'\cdots a_{n-k}')$。

此時我們所考慮的宇集合 U 乃是將 $n-k$ 個帽子重新分配給 S 集合中的每一位球迷，且每一位球迷恰分配到一個帽子的所有情形。故 $N=|U|=(n-k)!$。因 a_i 表示球迷 p_i 拿到自己的帽子，所以 $N(a_i)=(n-k-1)!$，其中 $1\leq i\leq n-k$。同理，

$$\begin{aligned}
&N(a_ia_j)=(n-k-2)!, && \text{其中 } 1\leq i<j\leq n-k\\
&N(a_ia_ja_h)=(n-k-3)!, && \text{其中 } 1\leq i<j<h\leq n-k\\
&\vdots\\
&N(a_1a_2\cdots a_{n-k})=1
\end{aligned}$$

由包含—排除原理 (Principle of inclusion and exclusion) 知

$$\begin{aligned}
& N(a_1'a_2'\cdots a_{n-k}')\\
= \;& N-\sum_{1\leq i\leq n-k}N(a_i)+\sum_{1\leq i<j\leq n-k}N(a_ia_j)-\sum_{1\leq i<j<h\leq n-k}N(a_ia_ja_h)+\cdots+(-1)^{n-k}N(a_1a_2\cdots a_{n-k})\\
= \;& (n-k)!-\binom{n-k}{1}\cdot(n-k-1)!+\binom{n-k}{2}\cdot(n-k-2)!-\binom{n-k}{3}\cdot(n-k-3)!+\cdots+\\
& (-1)^m\binom{n-k}{m}\cdot(n-k-m)!+\cdots+(-1)^{n-k}\binom{n-k}{n-k}\cdot 0!\\
= \;& \sum_{m=0}^{n-k}(-1)^m\binom{n-k}{m}\cdot(n-k-m)!\\
= \;& \sum_{m=0}^{n-k}(-1)^m\frac{(n-k)!}{m!(n-k-m)!}\cdot(n-k-m)!\\
= \;& (n-k)!\cdot\sum_{m=0}^{n-k}(-1)^m\frac{1}{m!}
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
C(n,k)\cdot N(a_1'a_2'\cdots a_{n-k}') =&\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot(n-k)!\cdot\sum_{m=0}^{n-k}(-1)^m\frac{1}{m!}\\
=&\frac{n!}{k!}\sum_{m=0}^{n-k}(-1)^m\frac{1}{m!} \qquad (1)
\end{aligned}$$

(b) 因「每位球迷所拿到的帽子皆非自己所拋的帽子」與「恰有 0 個球迷拿到他們自己所戴帽子」 同義，因此將 $k=0$ 代入 (1) 式，得 $n! \cdot \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{1}{m!}$ 種。
[註：本題答案即是 n 個數的重排 (derangement) 個數] $\square$