DM-02-06 ► 給定 n 個自然數 $1,2,3,\ldots,n$ 分別放在標記為 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 的 n 個位置上。所謂「n 個自然數的一種重排」(derangement)，就是將此 n 個自然數重新排列使得沒有一個數是落在原來所在的位置上。設 d_n 表示自然數 $1,2,3,\ldots,n$ 之所有重排的個數。試證自然數 $1,2,3,\ldots,n$ 之所有排列中，使得沒有兩個相鄰自然數 k 及 $k+1$ 依序出現在由左而右的排列順序中，即 $\ldots,k,k+1,\ldots$ 的情況不會出現之排列方式，共有 d_n+d_{n-1} 種情形。

【註 1】 重排數 $d_n=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$

【註 2】 課本此題的原意有一些問題：「$\cdots$ 使得沒有兩個相鄰自然數 k 及 $k+1$ 依序出現在由左而右的排列順序中，即 $\ldots,k,k+1,\ldots$ 和 $\ldots,k+1,k,\ldots$ 的情況不會出現之排列方式 $\cdots$」。 題目應修正如本題所陳述之方式方為正確。 換言之，題目應只求在不出現 $\ldots,k,k+1,\ldots$ 的情況下之排列數，而不包括 $\ldots,k+1,k,\ldots$ 的排列情況。

上述錯誤經賴志松同學的指正，並舉出 $n=3$ 的例子說明如下：
設 F_n 表示自然數 $1,2,3,\ldots,n$ 之排列中不出現 $\ldots,k,k+1,\ldots$ 的情況下的排列數。
設 E_n 表示自然數 $1,2,3,\ldots,n$ 之排列中不出現 $\ldots,k,k+1,\ldots$ 且不出現 $\ldots,k+1,k,\ldots$ 的情況下的排列數。

當 $n=3$ 時，所有排列情形如下： 123, 132, 213, 231, 312, 321
我們不難由觀察得知 $d_3=2$，$d_2=1$ 且 $F_3=d_3+d_2=2+1=3$ (即 132, 213, 321 等三種排列) $\neq E_3=0$。

【註 3】 正式提出證明之前，我們需要證明下列性質 (參考 DM-01-03 之預備性質)：

$$\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-1}{k} \tag{1}$$

【證明】

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}-\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\\
&= \binom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

【證明】 令 U 表示自然數 $1,2,3,\ldots,n$ 之所有排列情形所成的集合，且令 $N=|U|=n!$。 設 a_i 表示「在排列中 i 恰好位於 $i+1$ 之前」的這個性質，其中 $1\le i<n$。 因為將 i 固定出現在 $i+1$ 之前，可視為 $n-1$ 個數的排列，因此 $N(a_i)=(n-1)!$。 而 $N(a_ia_j)$，$1\le i<j<n$，即表示將 i 固定出現在 $i+1$ 之前且將 j 固定出現在 $j+1$ 之前的所有排列數 (可視為 $n-2$ 個數的排列數)，因此 $N(a_ia_j)=(n-2)!$。同理，

$$
\begin{aligned}
&N(a_ia_ja_k)=(n-3)!, && \text{其中 } 1\le i<j<k<n\\
&\vdots\\
&N(a_1a_2\cdots a_{n-1})=[n-(n-1)]!=1
\end{aligned}
$$

令 F_n 表示自然數 $1,2,3,\ldots,n$ 之排列中不出現 $\ldots,k,k+1,\ldots$ 的情況下的排列數，其中 $1\le k<n$。根據包含–排除原理 (Principle of inclusion and exclusion) 及利用 (1) 式代換可得

$$
\begin{aligned}
F_n = {}& N(a_1'a_2'\cdots a_{n-1}')\\
= {}& N-\sum_{1\le i\le n-1}N(a_i)+\sum_{1\le i<j\le n-1}N(a_ia_j)-\sum_{1\le i<j<k\le n-1}N(a_ia_ja_k)+\cdots+(-1)^{n-1}N(a_1a_2\cdots a_{n-1})\\
= {}& n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!-\binom{n-1}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!\\
= {}& n!-\left[\binom{n}{1}-\binom{n-1}{0}\right](n-1)!+\left[\binom{n}{2}-\binom{n-1}{1}\right](n-2)!-\left[\binom{n}{3}-\binom{n-1}{2}\right](n-3)!+\cdots\\
& +(-1)^{n-1}\left[\binom{n}{n-1}-\binom{n-1}{n-2}\right]1!+\left[(-1)^n\binom{n}{n}+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right]0!\\
= {}& \left[n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1!+(-1)^n\binom{n}{n}0!\right]+\\
& \left[(n-1)!-\binom{n-1}{1}(n-2)!+\binom{n-1}{2}(n-3)!-\cdots+(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}1!+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}0!\right]\\
= {}& n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}+(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k!}\\
= {}& d_n+d_{n-1}
\end{aligned}
$$

□

賴志松提供