

DM-03-01 ▶ 在一個邊長為 5 之正方形內部任意取定 26 個點，試證至少存在兩點，其距離最多為  $\sqrt{2}$ 。

【證明】 一個邊長為 5 之正方形共包含  $5 \times 5 = 25$  個單位正方形 (即邊長為 1 之正方形)。因正方形內部距離最遠的兩個點會發生在正方形的對邊頂角上，所以在一單位正方形內部其最遠的兩個點之距離為  $\sqrt{2}$ 。根據題意，我們只要證明至少存在有一個單位正方形其內部包含有兩個以上的點即可。

根據鴿舍原理 (定理 6)，將  $n = 26$  點放置在  $m = 25$  個單位正方形內，一定有某些單位正方形內部放置超過或等於  $\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lceil \frac{26}{25} \rceil = 2$  個點，故得證。

□

張肇明提供