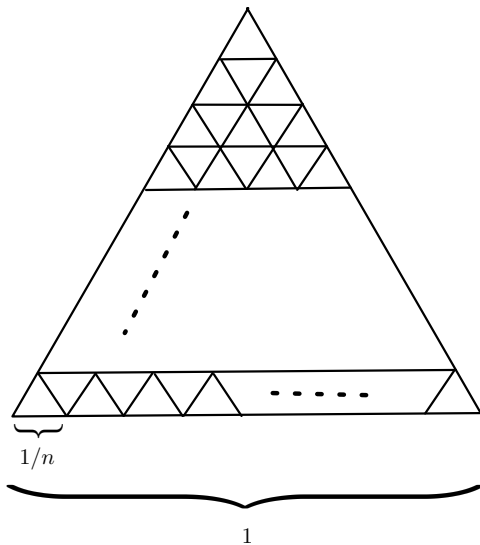


DM-03-02 ▶ 設 n 為給定之自然數且 $n > 1$ ，試決定一正整數 m ，使得在邊長為 1 之等邊三角形內部任意選定 m 個點，至少會有兩個點其距離 $\leq \frac{1}{n}$ 。

【解】 一個邊長為 1 之等邊三角形可以分割成許多較小的等邊三角形。如下圖所示，我們將其分割成邊長為 $\frac{1}{n}$ 之等邊三角形。則，邊長為 $\frac{1}{n}$ 之小三角形的個數共有

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$



我們可以由觀察得知，在小三角形內部中距離最遠的兩個點會發生在該兩點分別位於三角形的頂角上，且這個距離的長度為 $\frac{1}{n}$ 。因此只要存在有一個小三角形其內部被選定兩個點，則我們可以保證選定的 m 個點中至少會有兩個點其距離 $\leq \frac{1}{n}$ 。根據鴿舍原理 (定理 6)，將 m 點放置在 n^2 個小三角形內，且保證至少有一個小三角形其內部放置超過或等於 $\lceil \frac{m}{n^2} \rceil = 2$ 個點，故求得 $m = n^2 + 1$ 。

□

張肇明提供