DM-03-03 ► 利用除數法則及鴿舍原理，證明每一個有理數必為一循環小數。

【證明】 由定義知任一有理數必可表示成 $\frac{a}{b}$ 的分數型式。又根據除數法則知，必存在唯一的一對整數 q_0 與 r_0 使得

$$a = b \cdot q_0 + r_0 \quad \text{其中 } 0 \le r_0 < b\text{。}$$

重覆下列步驟，令 $a_k = 10 \cdot r_{k-1}$ 且將除數法則應用於 $\frac{a_k}{b}$，其中 $k = 1, 2, 3, \ldots$。則我們可以得到整數 $q_1, q_2, q_3, \ldots$ 與 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ 使得到下列等式成立：

$$\begin{cases} a_1 = b \cdot q_1 + r_1, & \text{其中 } 0 \le r_1 < b \\ a_2 = b \cdot q_2 + r_2, & \text{其中 } 0 \le r_2 < b \\ a_3 = b \cdot q_3 + r_3, & \text{其中 } 0 \le r_3 < b \\ \vdots & \\ a_k = b \cdot q_k + r_k, & \text{其中 } 0 \le r_k < b \\ \vdots & \end{cases} \tag{1}$$

由上述過程，得知若將分數 $\frac{a}{b}$ 化成小數，則

$$\frac{a}{b} = q_0.q_1q_2q_3 \cdots q_k \cdots$$

且

$$q_k = \frac{10 \cdot r_{k-1} - r_k}{b} \quad \text{其中 } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

考慮下列情形：

若存在一 $k < b$ 使得 $r_k = 0$ (換言之 b 整除 a_k)，則 $\frac{a}{b} = q_0.q_1q_2 \cdots q_k$ 為一循環小數 (即 $q_{k+1} = q_{k+2} = \cdots = 0$)。

若對所有 $k < b$ 均有 $r_k \neq 0$。考慮當 $k \ge b$ 時，由鴿舍原理知 $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k$ 中至少存在有兩個餘數相等。令 $r_i = r_j$，其中 $0 \le i \neq j \le k$。則由 (1) 式計算過程得

$$r_{i+1} = r_{j+1}, \quad r_{i+2} = r_{j+2}, \quad r_{i+3} = r_{j+3}, \quad \cdots$$

再根據 (2) 式知

$$q_{i+1} = q_{j+1}, \quad q_{i+2} = q_{j+2}, \quad q_{i+3} = q_{j+3}, \quad \cdots$$

故當出現第一個重覆餘數後，小數即開始循環。

$\square$

賴志松提供