DM-03-04 ► 證明任意給定的七個相異整數中，必有兩整數其和或是差為 10 的倍數。

【證明】 令 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7$ 為任意給定的七個相異整數。對任意 $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ 而言， 若存在有 $a_i \equiv a_j \pmod{10}$ (換言之，a_i 與 a_j 為 10 之同餘數)，根據定義

$$a_i = 10 \cdot q_1 + r, \quad \text{其中 } q_1 \in \mathbb{Z}\text{，且 } 0 \le r \le 9$$

且

$$a_j = 10 \cdot q_2 + r, \quad \text{其中 } q_2 \in \mathbb{Z}\text{，且 } 0 \le r \le 9$$

因此

$$a_i - a_j = 10 \cdot (q_1 - q_2), \quad \text{其中 } q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$$

即 a_i 與 a_j 的差為 10 的倍數。底下我們假設不存在有任意 $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ 使得 $a_i \equiv a_j \pmod{10}$ 成立。換言之，對任意 $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$， 若

$$a_i = 10 \cdot q_i + r_i, \quad \text{其中 } q_i \in \mathbb{Z}\text{，且 } 0 \le r_i \le 9$$

且

$$a_j = 10 \cdot q_j + r_j, \quad \text{其中 } q_j \in \mathbb{Z}\text{，且 } 0 \le r_j \le 9$$

則 $r_i \ne r_j$。很顯然 $(a_i + a_j) \equiv 0 \pmod{10}$ 若且唯若 $(r_i + r_j) \equiv 0 \pmod{10}$。因此題目的意思相當於要證明「在 0 至 9 的整數中任意取出七個不相同的整數，必存在有兩整數的和為 10 的倍數」。由於 在 0 至 9 的整數中取兩整數使其和為 10 的倍數之分割方式有下列六種：

$$(0+0) \equiv (1+9) \equiv (2+8) \equiv (3+7) \equiv (4+6) \equiv (5+5) \equiv 0 \pmod{10}$$

根據鴿舍原理，在六種分割方式中取出七個數，必然有兩個數同屬於一個分割。

$\square$

劉季昌提供