DM-03-05 ► 設 $m \in \mathbb{N}$ 且 $m > 1$，證明任何 m 個連續的整數中，必有一整數能被 m 所整除。

【證明】 令 $S = \{k, k+1, \ldots, k+m-1\}$ 表示連續 m 個整數所成之集合，其中 $k \in \mathbb{Z}$。 且設 $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$，則 $|S| = |\mathbb{Z}_m| = m$。我們定義一函數 $f : S \to \mathbb{Z}_m$ 如下

$$f(n) = n \pmod{m}, \quad \text{其中 } n \in S$$

底下，我們證明 f 為一對一函數。對任意兩整數 $a, b \in S$，假設 $f(a) = f(b)$，則 a 和 b 為模數 m 的同餘數 (即，$a \equiv b \pmod{m}$)。 換言之，$m \,|\, (a-b)$。因 $a, b \in S$，不失一般性假設 $a = k+i$ 且 $b = k+j$，其中 $0 \le i, j \le m-1$，則 $m \,|\, (i-j)$。但由於 $i, j \in \mathbb{Z}_m$，$-m < i-j < m$。所以 $i - j = 0$，得 $i = j$。即，$a = b$。

因 S 與 $\mathbb{Z}_m$ 均為有限集合且 $|S| = |\mathbb{Z}_m|$，根據鴿舍原理 (定理 2) 知，「f 是一對一函數」的充要條件是「f 是映成函數」。故得證 $f : S \to \mathbb{Z}_m$ 亦為一映成函數。因此，存在一整數 $n \in S$ 使得 $0 \equiv n \pmod{m}$ 成立。換言之，$m \,|\, n$。 □

張肇明提供