

**DM-03-07** ▶ 在一個有 51 位同學的班上，將其考試成績依等級  $A, B, C, D$  及  $E$  來評分。證明在任一次全班同學皆參加的考試中，至少有 11 位同學會得到同等級的成績。

【證明】 令  $S$  表示全班同學所成之集合，則  $|S| = 51$ 。設  $S_i$  為這次考試成績得到  $i$  等級的同學所成之集合，其中  $i \in \{A, B, C, D, E\}$ 。則

$$\bigcup_i S_i = S \text{ 且對任意 } i \neq j, S_i \cap S_j = \emptyset$$

換言之， $P = \{S_A, S_B, S_C, S_D, S_E\}$  為  $S$  之一分割，且  $|P| = 5$ 。因  $P$  為有限集合  $S$  的一個分割，根據鴿舍原理 (定理 3) 知， $P$  中必存在一個集合  $S_i$  使得

$$|S_i| \geq \frac{|S|}{|P|} = \frac{51}{5} > 10$$

故，得證至少有 11 位同學會得到同等級的成績。

□

張肇明提供