

DM-03-11 ► 試證明所有無理數所成的集合為不可數集合。

【證明】 令 \mathbb{Q} 與 $\overline{\mathbb{Q}}$ 分別表示所有有理數與所有無理數所成的集合。根據定理 10 敘述「可數集合的任一部份集合皆為可數集合」。考慮 $X \subset Y$ ，若 Y 為可數集合，則 X 亦為可數集合。換言之，若 X 為不可數集合，則 Y 亦為不可數集合。因為 $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ 已證實為不可數集合 (參考例題 11 證明) 且 $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ ，所以 \mathbb{R} 為不可數集合。

今假設 $\overline{\mathbb{Q}}$ 為可數集合。因為 \mathbb{Q} 為可數集合 (參考例題 12 證明)，根據定理 13「可數個可數集合的聯集仍為一個可數集合」， $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$ 應為可數集合，如此則發生矛盾。故 $\overline{\mathbb{Q}}$ 為不可數集合。

□

張肇明提供