DM-03-12 ► 試利用函數 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$，其定義如下：

$$f(x)=\frac{x}{(1-x^2)}$$

來證明 $(-1,1)$ 和 $\mathbb{R}$ 是等價的。

【證明】 欲證明 $(-1,1)$ 和 $\mathbb{R}$ 是等價的，我們必需證明 f 為一對射函數。對任一 $y\in\mathbb{R}$ 而言，我們將證明存在一實數 $x\in(-1,1)$ 使得 $f(x)=y$，所以 f 為映成函數。令

$$x=\begin{cases}0 & \text{，若 } y=0\\ \frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y} & \text{，若 } y\neq 0\end{cases}$$

很明顯的，若 $y=0$，則 $x=0\in(-1,1)$ 且 $f(0)=\frac{0}{1}=0$ 成立。底下我們考慮 $y\neq 0$ 的情形。因 $\sqrt{1+4y^2}-1>0$，所以

$$(-1+\sqrt{1+4y^2})^2=1+(1+4y^2)-2\sqrt{1+4y^2}=4y^2-2(\sqrt{1+4y^2}-1)<(2y)^2$$

即

$$(\frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y})^2=\frac{(-1+\sqrt{1+4y^2})^2}{(2y)^2}<1$$

所以 $x=\frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}\in(-1,1)$ 且

$$f(\frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y})=\frac{\frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}}{1-(\frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y})^2}=\frac{\frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}}{\frac{(4y^2)-[1+(1+4y^2)-2\sqrt{1+4y^2}]}{4y^2}}=\frac{\frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}}{\frac{2(-1+\sqrt{1+4y^2})}{4y^2}}=y$$

接著，我們證明 f 為一對一函數。對任意二實數 $x_1,x_2\in(-1,1)$ 而言，假設 $f(x_1)=f(x_2)$ 成立，即 $\frac{x_1}{(1-{x_1}^2)}=\frac{x_2}{(1-{x_2}^2)}$。則， $x_1(1-x_2^2)-x_2(1-x_1^2)=(x_1-x_2)(1+x_1x_2)=0$。因 $x_1,x_2\in(-1,1)$，$x_1x_2\neq -1$，由此可得 $x_1=x_2$。故知 f 為一對一函數。

□

張肇明提供