DM-03-13 ► 設 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$，試證明 $(0, 1)$ 與 (a, b) 是等價的。

證明： 欲證明 $(0, 1)$ 與 (a, b) 是等價的，我們必需在此二集合之間找到一對射函數。定義一個函數 $f : (a, b) \to (0, 1)$ 如下：

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad \text{其中 } x \in (a, b) \text{ 為一實數}$$

下面我們證明 f 為一對射函數。對任一 $y \in (0, 1)$ 而言，我們將證明存在一實數 $x \in (a, b)$ 使得 $f(x) = y$，所以 f 為映成函數。令 $x = a + (b-a)y$。因 $a < b$ 且 $y > 0$，得 $x > a$。又因為 $b > a$ 且 $y < 1$，得 $b(1-y) > a(1-y)$，即 $b > by + a(1-y) = a + (b-a)y = x$。故 $x \in (a, b)$。另外我們可以驗證

$$f(x) = f(a + (b-a)y) = \frac{[a + (b-a)y] - a}{b-a} = y$$

接著，我們證明 f 為一對一函數。假設對任意二實數 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 而言，$f(x_1) = f(x_2)$ 成立。則 $\frac{x_1-a}{b-a} = \frac{x_2-a}{b-a}$，由此可得 $x_1 = x_2$。故知 f 為一對一函數。

□

張肇明提供