DM-03-15 ► (a) 設 A 與 B 均為可數集合，試證 $A \times B$ 亦為可數集合。
(b) 設集合 A 為可數集合，試證對每一自然數 n， $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ times}}$ 亦為可數集合。

【證明】 (a) 若 A 與 B 均為有限集合，則 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$，故 $A \times B$ 亦為有限集合。根據定義，$A \times B$ 是一可數集合。底下我們考慮 A 與 B 之中至少有一為無限集合之情形。

因為 A 與 B 均為可數集合，知存在一對射函數 $f : A \to \mathbb{N}$ 且同時存在一對射函數 $g : B \to \mathbb{N}$ (若 A 或 B 為有限集合，根據定理 7 我們可以考慮對射函數 $f : A \to \mathbb{N}_{|A|}$ 與 $g : B \to \mathbb{N}_{|B|}$)。定義一函數 $h : A \times B \to \mathbb{N}$ 如下：

$$h(a,b) = 2^{f(a)} \cdot 3^{g(b)} \quad \text{其中 } (a,b) \in A \times B \text{ 為任一有序對} \tag{1}$$

很顯然的，$A \times B$ 為一無限集合。底下我們證明 $h : A \times B \to \mathbb{N}$ 為一對一函數。假設 $h(a,b) = h(a',b')$，根據 (1) 得 $2^{f(a)} \cdot 3^{g(b)} = 2^{f(a')} \cdot 3^{g(b')}$。因 $f(a), g(b), f(a'), g(b') \in \mathbb{N}$，則 $p = 2^{f(a)} \cdot 3^{g(b)} = 2^{f(a')} \cdot 3^{g(b')}$ 為一自然數。因為對任意大於 1 之自然數 p 而言，在質數依照由小而大順序排列情況下，p 皆有唯一的質因數連乘積的表示法。故可得 $f(a) = f(a')$ 且 $g(b) = g(b')$。但已知 f 與 g 皆為一對一函數，所以 $a = a'$ 且 $b = b'$，即 (a,b) 與 (a',b') 是集合 $A \times B$ 中的同一個有序對。故得證 $h : A \times B \to \mathbb{N}$ 為一對一函數。

因為 $A \times B$ 為一無限集合且 h 為一對一函數，$h(A \times B)$ 亦為一無限集合。另外，$h(A \times B)$ 是 $\mathbb{N}$ 的一個部份集合是很顯然的結果。由定理 9 知，$h(A \times B)$ 為一可數集合。下面我們考慮另一個函數 $h' : A \times B \to h(A \times B)$，其定義同 (1)。則， $h' : A \times B \to h(A \times B)$ 為一對射函數。由例題 13 之結果：

「假設 X 為一無限集合，如果存在某一對射函數從 X 對應至某一可數無限集合 S，則 X 必為可數集合」

因為 $A \times B$ 為一無限集合且 $h(A \times B)$ 為一可數無限集合，由於對射函數 $h' : A \times B \to h(A \times B)$ 之存在，故得證 $A \times B$ 為一可數集合。

(b) 由 (a) 之結果，知 $A \times A$ 為一可數集合 (考慮 $B = A$ 的情形)。則 $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ times}}$ 亦為可數集合之事實可以利用數學歸納法立即得證。

□

張肇明提供