

DM-03-16 ▶ 設集合  $A$  為可數集合且  $f: A \rightarrow B$  為映成函數，試證  $B$  為可數集合。

【證明】 因為  $A$  為可數集合，則存在一個對射函數  $g: A \rightarrow \mathbb{N}$ 。故  $g^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow A$  亦為一對射函數。考慮合成函數  $f \circ g^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow B$ ，因  $(f \circ g^{-1})(\mathbb{N}) = f(g^{-1}(\mathbb{N})) = f(A) = B$ ，故  $f \circ g^{-1}$  為一映成函數。因為  $B$  為函數  $f$  之對應域， $B$  為一非空集合。根據定理 12「設  $X$  為一非空集合，若存在一個函數  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$  為映成函數，則集合  $X$  為可數集合」，立即得證  $B$  為可數集合。

□

洪心怡、鄭雅文 提供