DM-04-01 ► 設 $S=\{1,2,3,4,5\}$，定義 $A=S\times S$，且在集合 A 上定義二元關係 ρ 為

$$(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1+y_1=x_2+y_2$$

(a) 試證 ρ 為一等價關係。
(b) 試決定等價類 $[(1,1)]$、$[(2,4)]$ 及 $[(1,3)]$。
(c) 試求由等價關係 ρ 所產生的 A 的分割。

【證明】 (a) 證明 ρ 具有反身性、對稱性及遞移性如下：

(i) 對 A 中每一元素 (x,y) 而言，因 $x+y=x+y$，$(x,y)\rho(x,y)$ 成立，故 ρ 具有反身性。

(ii) 對 A 中任意二元素 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 而言，若 $(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2)$ 成立，則 $x_1+y_1=x_2+y_2$。因 $x_2+y_2=x_1+y_1$ ，所以 $(x_2,y_2)\rho(x_1,y_1)$ 亦成立。故 ρ 具有對稱性。

(iii) 對 A 中任意三元素 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 與 (x_3,y_3) 而言，若 $(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2)$ 與 $(x_2,y_2)\rho(x_3,y_3)$ 成立，由二元關係定義知 $x_1+y_1=x_2+y_2$ 且 $x_2+y_2=x_3+y_3$，故得 $x_1+y_1=x_3+y_3$。即 $(x_1,y_1)\rho(x_3,y_3)$ 成立。故 ρ 具有遞移性。

(b) $[(1,1)]$、$[(2,4)]$ 及 $[(1,3)]$ 之等價類如下：

$[(1,1)]=\{(1,1)\}$。

$[(2,4)]=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$。

$[(1,3)]=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$。

(c) 設 P 是集合 A 由等價關係 ρ 所產生的分割。則

$$P=\{[(1,1)],[(1,2)],[(1,3)],[(1,4)],[(1,5)],[(2,5)],[(3,5)],[(4,5)],[(5,5)]\}$$

$\square$

張肇明提供