

DM-04-03 ▶ 設 Q 表示所有有理數 (rational number) 所成的集合，在 Q 上定義二元關係 ρ 為

$$\frac{p}{q} \rho \frac{r}{s} \Leftrightarrow p \cdot s = r \cdot q$$

證明 ρ 是 Q 上的一個等價關係。

【證明】 證明 ρ 具有反身性、對稱性及遞移性如下：

(i) 對 Q 中每一元素 $\frac{p}{q}$ 而言，因 $p \cdot q = p \cdot q$ ， $\frac{p}{q} \rho \frac{p}{q}$ 成立，故 ρ 具有反身性。

(ii) 對 Q 中任意二元素 $\frac{p}{q}$ 與 $\frac{r}{s}$ 而言，若 $\frac{p}{q} \rho \frac{r}{s}$ 成立，則 $p \cdot s = r \cdot q$ 。因 $r \cdot q = p \cdot s$ ，所以 $\frac{r}{s} \rho \frac{p}{q}$ 亦成立。故 ρ 具有對稱性。

(iii) 對 Q 中任意三元素 $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ 與 $\frac{p_3}{q_3}$ 而言，設 $\frac{p_1}{q_1} \rho \frac{p_2}{q_2}$ 與 $\frac{p_2}{q_2} \rho \frac{p_3}{q_3}$ 成立。由二元關係定義知 $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$ 且 $p_2 \cdot q_3 = p_3 \cdot q_2$ 。因此

$$p_1 \cdot q_3 = \frac{p_2 \cdot q_1}{q_2} \cdot \frac{p_3 \cdot q_2}{p_2} = p_3 \cdot q_1 \quad \circ$$

換言之， $\frac{p_1}{q_1} \rho \frac{p_3}{q_3}$ 成立。故 ρ 具有遞移性。

□

張肇明提供