

DM-04-04 ▶ 設 ρ_1, ρ_2 為定義在 A 上的兩個等價關係。定義二元關係 ρ_3 為

$$x \rho_3 y \Leftrightarrow x \rho_1 y \text{ 且 } x \rho_2 y$$

且定義二元關係 ρ_4 為

$$x \rho_4 y \Leftrightarrow x \rho_1 y \text{ 或 } x \rho_2 y$$

試證明 ρ_3 為 A 上的一個等價關係，但是 ρ_4 則否。

【證明】 (a) 證明 ρ_3 具有反身性、對稱性及遞移性如下：

- (i) 對 A 中每一元素 x 而言，因 ρ_1 與 ρ_2 具有反身性， $x \rho_1 x$ 且 $x \rho_2 x$ 成立。根據二元關係 ρ_3 之定義， $x \rho_3 x$ 亦成立。故 ρ_3 具有反身性。
- (ii) 對 A 中任意二元素 x 與 y 而言，若 $x \rho_3 y$ 成立，根據二元關係 ρ_3 之定義知 $x \rho_1 y$ 與 $x \rho_2 y$ 均成立。因為 ρ_1 與 ρ_2 具有對稱性， $y \rho_1 x$ 與 $y \rho_2 x$ 同樣也成立。所以 $y \rho_3 x$ 成立，且 ρ_3 具有對稱性。
- (iii) 對 A 中任意三元素 x, y 與 z 而言，若 $x \rho_3 y$ 與 $y \rho_3 z$ 成立，根據二元關係 ρ_3 之定義知 $x \rho_1 y, x \rho_2 y, y \rho_1 z, y \rho_2 z$ 皆成立。因為 ρ_1 與 ρ_2 具有遞移性， $x \rho_1 z$ 與 $x \rho_2 z$ 同樣也成立。再次根據 ρ_3 之定義， $x \rho_3 z$ 成立，且 ρ_3 具有遞移性。

(b) 下面我們證明 ρ_4 不一定具有遞移性，因此它不是一個等價關係。考慮 A 中三元素 x, y 與 z ，且假設 $x \rho_4 y$ 與 $y \rho_4 z$ 成立。底下我們將證明 $x \rho_4 z$ 不一定成立。根據 ρ_4 之定義，我們考慮下列情形：因 $x \rho_4 y$ 成立，我們假設 $x \rho_1 y$ 成立，但 $x \rho_2 y$ 不成立。同樣的，因 $y \rho_4 z$ 成立，我們假設 $y \rho_1 z$ 不成立，但 $y \rho_2 z$ 成立。對 ρ_1 等價關係而言，根據定理 1， $x \rho_1 y$ 導致 $[x] = [y]$ 。因 $y \rho_1 z$ 不成立，得 $[y] \neq [z]$ 。所以 $[x] \neq [z]$ 且 $x \rho_1 z$ 不成立。因為 $y \rho_2 z$ 成立，但 $x \rho_2 y$ 不成立，同理可證 $x \rho_2 z$ 不成立。因 $x \rho_1 z$ 與 $x \rho_2 z$ 均不成立，根據 ρ_4 之定義 $x \rho_4 z$ 亦不成立。故在上述情形下， ρ_4 不具有遞移性。

□

張肇明提供