

DM-04-05 ▶ 設 ρ_1 為定義在 A 上的一個等價關係，且 ρ_2 為定義在 B 上的一個等價關係。定義 ρ 為集合 $A \times B$ 的一個二元關係，定義如下：

$$(a, b) \rho (c, d) \Leftrightarrow a \rho_1 c \text{ 且 } b \rho_2 d$$

試問 ρ 是否為 $A \times B$ 上的一個等價關係，請說明理由。

【解】 ρ 是 $A \times B$ 上的一個等價關係。下面我們證明 ρ 具有反身性、對稱性及遞移性：

- (i) 對 $A \times B$ 中每一元素 (a, b) 而言，因 ρ_1 與 ρ_2 具有反身性， $a \rho_1 a$ 且 $b \rho_2 b$ 成立。根據二元關係 ρ 之定義， $(a, b) \rho (a, b)$ 亦成立。故 ρ 具有反身性。
- (ii) 對 $A \times B$ 中任意二元素 (a, b) 與 (c, d) 而言，若 $(a, b) \rho (c, d)$ 成立，根據二元關係 ρ 之定義知 $a \rho_1 c$ 與 $b \rho_2 d$ 均成立。因為 ρ_1 與 ρ_2 具有對稱性， $c \rho_1 a$ 與 $d \rho_2 b$ 同樣也成立。所以 $(c, d) \rho (a, b)$ 成立，故 ρ 具有對稱性。
- (iii) 對 $A \times B$ 中任意三元素 $(a, b), (c, d)$ 與 (e, f) 而言，若 $(a, b) \rho (c, d)$ 與 $(c, d) \rho (e, f)$ 成立，根據二元關係 ρ 之定義知 $a \rho_1 c, b \rho_2 d, c \rho_1 e$ ，與 $d \rho_2 f$ 皆成立。因為 ρ_1 與 ρ_2 具有遞移性， $a \rho_1 e$ 與 $b \rho_2 f$ 同樣也成立。再次根據 ρ 之定義， $(a, b) \rho (e, f)$ 成立，故 ρ 具有遞移性。

□

張肇明提供