**DM-04-07** ► 設 $I=[0,\infty)$，定義 $\rho$ 在集合 $I\times I$ 上，其定義如下：

$$(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2\le x_2^2+y_2^2 \text{ 且 } y_1\le y_2$$

試證明 $(I\times I,\rho)$ 為一個偏序集。

【證明】 下面證明 $\rho$ 具有反身性、反對稱性，以及遞移性。

(i) 對 $I\times I$ 中每一元素 $(x,y)$ 而言，因 $x^2+y^2\le x^2+y^2$ 且 $y\le y$，$(x,y)\,\rho\,(x,y)$ 成立，故 $\rho$ 具有反身性。

(ii) 對 $I\times I$ 中任意二元素 $(x_1,y_1)$ 與 $(x_2,y_2)$ 而言，若 $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2)$ 與 $(x_2,y_2)\,\rho\,(x_1,y_1)$ 同時成立，根據 $\rho$ 之定義得 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$ 且 $y_1=y_2$。因 $x_1,x_2\in I=[0,\infty)$，所以 $x_1=x_2$。故 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ 且 $\rho$ 具有反對稱性。

(iii) 對 $Q$ 中任意三元素 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$ 與 $(x_3,y_3)$ 而言，設 $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2)$ 與 $(x_2,y_2)\,\rho\,(x_3,y_3)$ 均成立。由$\rho$ 之定義得 $x_1^2+y_1^2\le x_2^2+y_2^2\le x_3^2+y_3^3$ 且 $y_1\le y_2\le y_3$。因此 $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_3,y_3)$ 亦成立。故 $\rho$ 具有遞移性。

□

張肇明提供