

DM-04-09 ▶ 試分別舉出滿足下列特性之二元關係  $\rho$  :

- (a)  $\rho$  不具對稱性，亦不具遞移性。
- (b)  $\rho$  具有反身性及對稱性，但是沒有遞移性。
- (c)  $\rho$  具有對稱性及遞移性。

【解】 (a) 令  $\rho$  為定義在  $\mathbb{Z}$  上的一個二元關係，其定義如下：

$$a \rho b \Leftrightarrow a - b \leq 1$$

因為對任一整數  $a \in \mathbb{Z}$ ， $a - a = 0 \leq 1$ ，所以  $a \rho a$  成立。故  $\rho$  具有反身性。下面例子說明  $\rho$  不具有對稱性。考慮  $a = 1$  及  $b = 3$ 。因為  $1 - 3 = -2 \leq 1$ ，所以  $a \rho b$  成立。但是  $3 - 1 = 2 > 1$ ，所以  $b \rho a$  不成立。故  $\rho$  不具有對稱性。下面例子說明  $\rho$  不具有遞移性。考慮  $a = 5$ ， $b = 4$  及  $c = 3$ 。因為  $5 - 4 = 1$  及  $4 - 3 = 1$ ，所以  $a \rho b$  及  $b \rho c$  成立。但是  $5 - 3 = 2 > 1$ ，所以  $a \rho c$  不成立。故  $\rho$  不具有遞移性。

(b) 令  $\rho$  為定義在  $\mathbb{Z}$  上的一個二元關係，其定義如下：

$$a \rho b \Leftrightarrow |a - b| \leq 1$$

因為對任一整數  $a \in \mathbb{Z}$ ， $|a - a| = 0 \leq 1$ ，所以  $a \rho a$  成立。故  $\rho$  具有反身性。對任二整數  $a, b \in \mathbb{Z}$ ，若  $a \rho b$  成立，則  $|b - a| = |a - b| \leq 1$ 。所以  $b \rho a$  亦成立。故  $\rho$  具有對稱性。下面例子說明  $\rho$  不具有遞移性。考慮  $a = k - 1$ ， $b = k$  及  $c = k + 1$ ，其中  $k \in \mathbb{Z}$  為任一整數。因為  $|a - b| = |(k - 1) - k| = 1$  且  $|b - c| = |k - (k + 1)| = 1$ ，所以  $a \rho b$  與  $b \rho c$  均成立。但是因為  $|a - c| = |(k - 1) - (k + 1)| = 2$ ，所以  $a \rho c$  不成立。故  $\rho$  不具有遞移性。

(c) 令  $\rho$  為定義在  $\mathbb{Z}$  上的一個二元關係，其定義如下： $a \rho b \Leftrightarrow a = b$ 。很顯然  $\rho$  具有對稱性及遞移性。

【註】若一二元關係  $\rho$  滿足對稱性及遞移性，則  $\rho$  必定滿足反身性。Why?

□

張肇明提供