DM-04-11 ► 一個定義在集合 A 上的偏序關係 ρ，滿足下列兩條件：
(1) ρ 為一個全序關係；
(2) 每一個 A 的非空子集合 B，均使得偏序集 (B,ρ) 有一至低元素；
則稱 ρ 為 A 上的一個良序關係 (well ordering)。
試證明 $\mathbb{N}$ 的任一非空子集合 X，$(X,\leq)$ 為一良序集，但是 $(\mathbb{R},\leq)$ 不是一個良序集。

【證明】 令 $X\subset\mathbb{N}$ 且 $X\neq\emptyset$。很顯然 $(X,\leq)$ 是一個偏序集 (檢查反身性、反對稱性及遞移性)。因任二元素 $a,b\in X$，$a\leq b$ 或 $b\leq a$ 其中之一成立，換言之 a 和 b 是可比較的 (comparable)，$\leq$ 在 X 上為一全序關係，且 $(X,\leq)$ 為一全序集。設 $Y\subseteq X$ 且 $Y\neq\emptyset$。因 Y 為 $\mathbb{N}$ 的一個部份集合且 Y 不為空集合，由自然數的良序原則知存在一元素 $y=\min Y$，此一元素對 $(Y,\leq)$ 而言，即是至低元素。根據題意所設定的條件 (1) 與 (2)，$\leq$ 為 X 上的一個良序關係。故 $(X,\leq)$ 為一良序集。

不難檢查 $(\mathbb{R},\leq)$ 是一個偏序集，同時也是一個全序集。然而並非所有 $\mathbb{R}$ 的非空子集合均存在一至低元素，故 $(\mathbb{R},\leq)$ 不是一個良序集。例如，考慮區間 $(0,1)$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集合，但它不存在有至低元素。

□

張肇明提供