DM-04-12 ► 設集合 F 為所有定義在 $[0,1]$ 的實數值函數所成之集合。在 F 上定義二元關係 ρ 為

$$f\,\rho\,g \Leftrightarrow f(x) \le g(x),\ \forall x \in [0,1]$$

試證 (F,ρ) 為一個偏序集。(F,ρ) 是否有至高或至低元素？請說明理由。

【證明】 我們證明 ρ 在 F 上具有反身性、反對稱性與遞移性，因此 (F,ρ) 為一個偏序集。

(i) 對 F 中的每一函數 f 而言，因 $f(x) \le f(x)$ 其中 $x \in [0,1]$， $f\,\rho\,f$ 成立，故 ρ 具有反身性。

(ii) 對 F 中任意二函數 f 與 g 而言，若 $f\,\rho\,g$ 與 $g\,\rho\,f$ 同時成立，根據 ρ 之定義得 $f(x) \le g(x)$ 且 $g(x) \le f(x)$，對所有 $x \in [0,1]$ 均成立。因此 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是集合 F 中的同一函數 (即 $f(x) = g(x)$， $\forall x \in [0,1]$)。故 ρ 具有反對稱性。

(iii) 對 F 中任意三元素 f，g 與 h 而言，若 $f\,\rho\,g$ 與 $g\,\rho\,h$ 同時成立，由 ρ 之定義得 $f(x) \le g(x)$ 且 $g(x) \le h(x)$，對所有 $x \in [0,1]$ 均成立。因此 $f(x) \le h(x)$ 對所有 $x \in [0,1]$ 亦成立。故得 $f\,\rho\,h$ 成立且 ρ 具有遞移性。

接著，我們證明 (F,ρ) 偏序集中不存在有至高或至低元素。今假設 $f^* \in F$ 是至高元素，根據至高元素的定義，對 F 中的每一個函數 f 而言，恆有 $f(x) \le f^*(x)$ 其中 $x \in [0,1]$。定義一函數 $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ 如下：

$$g(x) = f^*(x) + 1,\ \forall x \in [0,1]$$

很顯然的，g 是一個定義在 $[0,1]$ 的實數值函數，故 $g \in F$。但對所有 $x \in [0,1]$， $g(x) > f^*(x)$。這與 f^* 是(F,ρ) 偏序集中的至高元素相互矛盾，故 (F,ρ) 中不存在有至高元素。同理可證 (F,ρ) 中亦不存在有至低元素。

$\square$

張肇明提供