DM-05-01-a ► 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3, & n \geq 2 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \end{cases}$$

【解】 特徵方程式為 $\alpha^2 + 6\alpha + 9 = 0$，故 $\alpha = -3$ 為一二次重根。
因此齊次部份之一般解為

$$\{a_n^{(h)}\}_{n=0}^{\infty} = \{(c_1 + c_2 n)(-3)^n\}_{n=0}^{\infty}$$

設 $a_n^{(p)} = d$ 為遞迴式的一個特殊解，代入得 $d + 6d + 9d = 3$，故 $d = \frac{3}{16}$。

因此

$$\{a_n^{(g)}\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{(c_1 + c_2 n)(-3)^n + \frac{3}{16}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

為其一般解，其中 c_1 與 c_2 為兩個任意常數。

代入起始條件 $a_0 = 1$ 及 $a_1 = 2$，得

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 \cdot 0)(-3)^0 + \frac{3}{16} = 1 \\ (c_1 + c_2 \cdot 1)(-3)^1 + \frac{3}{16} = 2 \end{cases}$$

解聯立方程式，得 $c_1 = \frac{13}{16}$ 及 $c_2 = -\frac{17}{12}$。故

$$\{a_n^{(g)}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{(\frac{13}{16} - \frac{17}{12} n)(-3)^n + \frac{3}{16}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

□

賴志松、劉季昌提供