DM-05-01-c ► 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n - 4a_{n-2} + 3a_{n-3} = 0, & n \geq 3 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \end{cases}$$

【解】 特徵方程式為 $\alpha^3 - 4\alpha + 3 = 0$，即 $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 3) = 0$。
故特徵根為 $\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ 及 $\alpha_3 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ 。
因此其一般解為

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (\frac{-1+\sqrt{13}}{2})^n + c_3 \cdot (\frac{-1-\sqrt{13}}{2})^n, \quad n \geq 0$$

代入起始條件 $a_0 = 1, a_1 = 1$ 及 $a_2 = 2$，得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + (\frac{-1+\sqrt{13}}{2}) \cdot c_2 + (\frac{-1-\sqrt{13}}{2}) \cdot c_3 = 1 \\ c_1 + (\frac{-1+\sqrt{13}}{2})^2 \cdot c_2 + (\frac{-1-\sqrt{13}}{2})^2 \cdot c_3 = 2 \end{cases}$$

利用矩陣求解聯立方程式

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{13}}{2} & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & (\frac{-1+\sqrt{13}}{2})^2 & (\frac{-1-\sqrt{13}}{2})^2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} --------- (1) \\ --------- (2) \\ --------- (3) \end{array}$$

將 (1) 列×(−1)+(2) 列之結果取代 (2) 列，同時將 (1) 列×(−1)+(3) 列之結果取代 (3) 列

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{13}}{2} & \frac{-3-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{13}}{2} & \frac{5-\sqrt{13}}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} --------- (4) \\ --------- (5) \\ --------- (6) \end{array}$$

由 (5)、(6) 兩列知

$$\begin{cases} (\frac{-3+\sqrt{13}}{2}) \cdot c_2 + (\frac{-3-\sqrt{13}}{2}) \cdot c_3 = 0 \\ (\frac{5+\sqrt{13}}{2}) \cdot c_2 + (\frac{5-\sqrt{13}}{2}) \cdot c_3 = 1 \end{cases}$$

將上述二式之左右兩邊同時乘 2，則

$$\begin{cases} (-3 + \sqrt{13}) \cdot c_2 + (-3 - \sqrt{13}) \cdot c_3 = 0 & --------- \ (7) \\ (5 + \sqrt{13}) \cdot c_2 + (5 - \sqrt{13}) \cdot c_3 = 2 & --------- \ (8) \end{cases}$$

(8) 式減 (7) 式，得 $8c_2 + 8c_3 = 2$，即 $c_2 + c_3 = \frac{1}{4}$。因 $c_1 + c_2 + c_3 = 1$，故 $c_1 = \frac{3}{4}$。
將 $c_3 = \frac{1}{4} - c_2$ 代入 (8) 式，經化簡後得 $c_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2\sqrt{13}}$。 再次將 c_2 代入 (8) 式並解得 $c_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2\sqrt{13}}$。
故

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{3}{4} + (\frac{3+\sqrt{13}}{2\sqrt{13}})(\frac{-1+\sqrt{13}}{2})^n + (\frac{-3+\sqrt{13}}{2\sqrt{13}})(\frac{-1-\sqrt{13}}{2})^n\right\}_{n=0}^{\infty}$$

□

陳昇賢、林靜賢提供