DM-05-01-d ► 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 54n^2, & n \geq 2 \\ a_0 = a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

【討論】 考慮 $n = 2$ 時，$a_2 - 3a_1 - 4a_0 = 54 \cdot 2^2$。代入 $a_0 = a_1 = a_2 = 1$，得 $1 - 3 - 4 = 216$ 產生矛頓，故本題無解。 修正題目如下：

解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 54n^2, & n \geq 2 \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

【解】 特徵方程式為 $\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$，即 $(\alpha+1)(\alpha-4) = 0$。
因此 $\alpha_1 = -1$ 與 $\alpha_2 = 4$ 為二特徵根。
齊次部份之一般解為 $a_n^{(h)} = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot (4)^n$，其中 c_1, c_2 為任意常數。
令 $a_n^{(p)} = d_0 + d_1 n + d_2 n^2$ 為遞迴關係式的一個解，代入之後得

$$\Big[d_0 + d_1 n + d_2 n^2\Big] - 3\Big[d_0 + d_1(n-1) + d_2(n-1)^2\Big] - 4\Big[d_0 + d_1(n-2) + d_2(n-2)^2\Big] = 54n^2$$

經化簡後得

$$(-6d_0 + 11d_1 - 19d_2) + (-6d_1 + 22d_2)n + (-6d_2)n^2 = 54n^2$$

即

$$\begin{cases} -6d_0 + 11d_1 - 19d_2 = 0 \\ -6d_1 + 22d_2 = 0 \\ -6d_2 = 54 \end{cases}$$

解得 $d_2 = -9$，$d_1 = -33$，及 $d_0 = -32$。故 $a_n^{(p)} = -9n^2 - 33n - 32$ 為一組特殊解。 因此，當 $n \geq 0$ 時，遞迴關係式之一般解為

$$a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot (4)^n - 9n^2 - 33n - 32$$

其中 c_1 與 c_2 為兩個未定係數。
代入起始條件 $a_0 = a_1 = 1$，得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 32 = 1 \\ -c_1 + 4c_2 - 74 = 1 \end{cases}$$

解聯立方程式，得 $c_1 = \frac{57}{5}$ 及 $c_2 = \frac{108}{5}$。
故

$$\{a_n^{(g)}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{57}{5} \cdot (-1)^n + \frac{108}{5} \cdot (4)^n - 9n^2 - 33n - 32\right\}_{n=0}^{\infty}$$

□

黃俊凱提供