DM-05-01-f ▶ 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 12n[2^n + (-2)^n] \qquad n \geq 2 \\ a_0 = 4, \quad a_1 = 0 \end{cases}$$

【解】 特徵方程式為 $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$，即 $(\alpha - 2)^2 = 0$。 因此 $\alpha = 2$ 為特徵根 (二次重根)。
故 $\{a_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n\}_{n=0}^{\infty}$ 為齊次部份之一組解。
令 $\{a_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty} = \{\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ 為齊次部份之另一線性獨立解。代入得

$$\alpha^n - 4\alpha^{n-1} + 4\alpha^{n-2} = 0$$

對 α 微分後可得

$$n\alpha^{n-1} - 4(n-1)\alpha^{n-2} + 4(n-2)\alpha^{n-3} = 0$$

等號兩邊同乘 α

$$n\alpha^n - 4(n-1)\alpha^{n-1} + 4(n-2)\alpha^{n-2} = 0$$

由上式很容易看出來，若令 $\{a_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty} = \{n\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$，可得齊次部份的另一解，且很明顯的與 $\{\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ 為線性獨立的兩組解。故齊次部份之一般解可表示為

$$\{a_n^{(h)}\}_{n=0}^{\infty} = \Big\{c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n\Big\}_{n=0}^{\infty}$$

其中 $c_1, c_2,$ 為任意常數。

接著，我們要求解遞迴關係式之特殊解 $\{a_n^{(p)}\}_{n=0}^{\infty}$。我們分別考慮下列兩遞迴關係式之特殊解：

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 12n \cdot 2^n \tag{1}$$

與

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 12n \cdot (-2)^n \tag{2}$$

因為齊次部份之一般解中已包含有 $(c_1 + c_2 n) \cdot 2^n$ 項，所以當考慮 (1) 式時，其特殊解可取其形如 $(c + bn)n^2 \cdot 2^n$ 之項。令 $a_n^{(p_1)} = (bn^2 + cn^3) \cdot 2^n$，$n \geq 0$，其中 b, c 為未定係數。代入 (1) 式得

$$\Big[\Big(bn^2 + cn^3\Big) \cdot 2^n\Big] - 4\Big[\Big(b(n-1)^2 + c(n-1)^3\Big) \cdot 2^{(n-1)}\Big] + 4\Big[\Big(b(n-2)^2 + c(n-2)^3\Big) \cdot 2^{(n-2)}\Big] = 12n \cdot 2^n$$

化簡後得 $(2b - 6c) \cdot 2^n + 6cn \cdot 2^n = 12n \cdot 2^n$，因此

$$\begin{cases} 2b - 6c = 0 \\ 6c = 12 \end{cases}$$

解得 $b = 6$ 且 $c = 2$。故 $\{a_n^{(p_1)}\}_{n=0}^{\infty} = \Big\{(6n^2 + 2n^3) \cdot 2^n\Big\}_{n=0}^{\infty}$。

其次，我們考慮 (2) 式之特殊解。 令 $a_n^{(p_2)} = (d+en)\cdot(-2)^n$，$n \geq 0$，其中 d,e 為二未定係數。代入 (2) 式得

$$\Big[(d+en)\cdot(-2)^n\Big] - 4\Big[\big(d+e(n-1)\big)\cdot(-2)^{(n-1)}\Big] + 4\Big[\big(d+e(n-2)\big)\cdot(-2)^{(n-2)}\Big] = 12n\cdot 2^n$$

化簡後得 $(4d-4e)\cdot(-2)^n + 4en\cdot(-2)^n = 12n\cdot(-2)^n$，因此

$$\begin{cases} 4d-4e=0 \\ 4e=12 \end{cases}$$

解得 $d=e=3$。故 $\{a_n^{(p_2)}\}_{n=0}^{\infty} = \Big\{(3+3n)\cdot(-2)^n\Big\}_{n=0}^{\infty}$。

所以遞迴關係式之一般解為

$$a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (c_1 + c_2 n + 6n^2 + 2n^3)\cdot 2^n + (3+3n)\cdot(-2)^n, \quad n \geq 0$$

其中 $c_1, c_2,$ 為未定係數。
代入起始條件 $a_0 = 4$ 與 $a_1 = 0$ 得

$$\begin{cases} c_1 + 3 = 4 \\ (c_1 + c_2 + 8)\cdot 2 + 6\cdot(-2) = 0 \end{cases}$$

解聯立方程式，得 $c_1 = 1$ 與 $c_2 = -3$。 故

$$\{a_n^{(g)}\}_{n=0}^{\infty} = \Big\{(1 - 3n + 6n^2 + 2n^3)\cdot 2^n + (3+3n)\cdot(-2)^n\Big\}_{n=0}^{\infty}$$

□