DM-05-01-g ► 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

【解】 特徵方程式為 $\alpha - 1 = 0$，因此 $\alpha = 1$ 為特徵根。
齊次部份之一般解為 $a_n^{(h)} = c \cdot (1)^n = c$，其中 c 為任意常數。
令 $a_n^{(p)} = d \cdot 3^n$ 為遞迴關係式的一個解，其中 d 為一常數。代入遞迴關係式得

$$d \cdot 3^n = d \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1}, \quad \text{其中 } n \geq 1$$

上式可表示成 $(3d) \cdot 3^{n-1} = (d+1) \cdot 3^{n-1}$，即 $3d = d + 1$。故，$d = \frac{1}{2}$ 且 $a_n^{(p)} = \frac{3^n}{2}$ 為一組特殊解。
因此，當 $n \geq 0$ 時，遞迴關係式之一般解為

$$a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c + \frac{3^n}{2}$$

其中 c 為未定係數。
代入起始條件 $a_0 = 1$，得 $c + \frac{3^0}{2} = 1$。因此 $c = \frac{1}{2}$。
故

$$\{a_n^{(g)}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

□

蕭明傳、鄭雅文提供