DM-05-01-h ► 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 3^{n-2} & n \geq 2 \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

【解】 特徵方程式為 $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$，因此 $\alpha = 1$ 為一特徵根 (二次重根)。
齊次部份之一般解為 $a_n^{(h)} = c_1 \cdot (1)^n + c_2 \cdot n \cdot (1)^n = c_1 + c_2 n$，其中 c_1, c_2 為任意常數。
令 $a_n^{(p)} = d \cdot 3^n$ 為遞迴關係式的一個解，其中 d 為一常數。代入遞迴關係式得

$$(d \cdot 3^n) - 2(d \cdot 3^{n-1}) + (d \cdot 3^{n-2}) = 3^{n-2}, \quad \text{其中 } n \geq 1$$

上式可表示成 $(3^2 - 2 \cdot 3 + 1)d \cdot 3^{n-2} = 3^{n-2}$，即 $4d = 1$。故，$d = \frac{1}{4}$ 且 $a_n^{(p)} = \frac{3^n}{4}$ 為一組特殊解。
因此，當 $n \geq 0$ 時，遞迴關係式之一般解為

$$a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 + c_2 n + \frac{3^n}{4}$$

其中 c_1, c_2 為二未定係數。
代入起始條件 $a_0 = a_1 = 1$，得

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{4} = 1 \\ c_1 + c_2 + \frac{3}{4} = 1 \end{cases}$$

解聯立方程式得 $c_1 = \frac{3}{4}$ 且 $c_2 = -\frac{1}{2}$。
故

$$\{a_n^{(g)}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} n + \frac{3^n}{4} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$\square$