**DM-05-01-i** ► 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0 \qquad n \geq 0 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1 \end{cases}$$

【解】 特徵方程式為 $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 4 = 6$，即 $(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) = 0$。
因此 $\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = 2$ 與 $\alpha_3 = 3$ 為三個特徵根。
原式之一般解為

$$a_n = c_1 \cdot (1)^n + c_2 \cdot (2)^n + c_3 \cdot (3)^n = c_1 + c_2 \cdot (2)^n + c_3 \cdot (3)^n$$

其中 $c_1, c_2, c_3$ 為未定係數。
代入起始條件 $a_0 = 1$，$a_1 = -1$ 與 $a_2 = 1$ 得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot (2)^0 + c_3 \cdot (3)^0 = 1 \\ c_1 + c_2 \cdot (2)^1 + c_3 \cdot (3)^1 = -1 \\ c_1 + c_2 \cdot (2)^2 + c_3 \cdot (3)^2 = 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = -1 \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 1 \end{cases}$$

解聯立方程式，得 $c_1 = 6$，$c_2 = -8$，$c_3 = 3$。 故

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{6 - 8 \cdot 2^2 + 3^{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

□

蔣仲翔、陳韋廷提供