DM-05-01-j ► 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n & n \geq 2 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = -1 \end{cases}$$

【解】 特徵方程式為 $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$，即 $(\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0$。
因此 $\alpha_1 = 1$ 與 $\alpha_2 = 2$ 為兩個相異特徵根。
齊次部份之一般解為

$$a_n^{(h)} = c_1 \cdot (1)^n + c_2 \cdot (2)^n = c_1 + c_2 \cdot (2)^n$$

其中 $c_1, c_2,$ 為任意常數。
若設 $a_n^{(p)} = bn + c$ 為遞迴關係式之一特殊解，代入原式之後為

$$\Big(bn + c\Big) - 3\Big(b(n-1) + c\Big) + 2\Big(b(n-2) + c\Big) = n$$

化簡後得 $-b = n$，這是不可能的；因為 b 應為一常數。我們知道當 $\alpha_1 = 1$ 為特徵根時，常數項必為齊次部份 $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ 之解。因此當我們考慮特殊解時，常數項應不予考慮，而必需選擇其它的線性獨立解。

令 $a_n^{(p)} = bn^2 + cn$ 為遞迴關係式之一特殊解，代入原式之後為

$$\Big(bn^2 + cn\Big) - 3\Big(b(n-1)^2 + c(n-1)\Big) + 2\Big(b(n-2)^2 + c(n-2)\Big) = n$$

化簡後得 $(5b - c) + (-2b)n = n$，因此

$$\begin{cases} 5b - c = 0 \\ -2b = 1 \end{cases}$$

即 $b = -\frac{1}{2}$ 且 $c = -\frac{5}{2}$。故得到遞迴關係式之一般解為

$$a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 + c_2 \cdot (2)^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n, \quad n \geq 0$$

其中 $c_1, c_2,$ 為未定係數。
代入起始條件 $a_0 = 1$ 與 $a_1 = -1$ 得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 - 3 = -1 \end{cases}$$

解聯立方程式，得 $c_1 = 0$ 且 $c_2 = 1$。 故

$$\{a_n^{(g)}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{2^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n\right\}_{n=0}^{\infty}$$

□