DM-05-01-k ► 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4}a_{n-2} + 2^{-n} & n \geq 2 \\ a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

【解】 移項後遞迴關係式為 $a_n - a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2} = 2^{-n},\ n \geq 2$。
所以特徵方程式為 $\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = 0$，即 $(\alpha - \frac{1}{2})^2 = 0$。 因此 $\alpha = \frac{1}{2}$ 為特徵根 (二次重根)。
故 $\{a_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty} = \{2^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ 為齊次部份之一組解。
令 $\{a_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty} = \{\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ 為齊次部份之另一線性獨立解。代入得

$$\alpha^n - \alpha^{n-1} + \frac{1}{4}\alpha^{n-2} = 0$$

對 α 微分後可得

$$n\alpha^{n-1} - (n-1)\alpha^{n-2} + \frac{1}{4}(n-2)\alpha^{n-3} = 0$$

等號兩邊同乘 α

$$n\alpha^{n} - (n-1)\alpha^{n-1} + \frac{1}{4}(n-2)\alpha^{n-2} = 0$$

由上式很容易看出來，若令 $\{a_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty} = \{n\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$，可得齊次部份的另一解，且很明顯的與 $\{\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ 為線性獨立的兩組解。故齊次部份之一般解可表示為

$$\{a_n^{(h)}\}_{n=0}^{\infty} = \Big\{c_1 \cdot 2^{-n} + c_2 \cdot n \cdot 2^{-n}\Big\}_{n=0}^{\infty}$$

其中 $c_1, c_2,$ 為任意常數。
接著，我們要求遞迴關係式的一個特殊解 $\{a_n^{(p)}\}_{n=0}^{\infty}$。因為齊次部份之一般解中已包含 2^{-n} 項及 $n \cdot 2^{-n}$ 項， 所以特殊解可取其形如 $n^2 \cdot 2^{-n}$ 之項。令 $a_n^{(p)} = c \cdot n^2 \cdot 2^{-n}$，$n \geq 0$，其中 c 為未定係數。代入原式之後為

$$\Big(c \cdot n^2 \cdot 2^{-n}\Big) - \Big(c \cdot (n-1)^2 \cdot 2^{-(n-1)}\Big) + \frac{1}{4}\Big(c \cdot (n-2)^2 \cdot 2^{-(n-2)}\Big) = 2^{-n}$$

化簡後得 $c \cdot 2^{1-n} = 2^{-n}$，因此 $c = \frac{1}{2}$。

故得到遞迴關係式之一般解為

$$a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 \cdot 2^{-n} + c_2 \cdot n \cdot 2^{-n} + \frac{1}{2}n^2 \cdot 2^{-n}, \quad n \geq 0$$

其中 $c_1, c_2,$ 為未定係數。
代入起始條件 $a_0 = 2$ 與 $a_1 = \frac{9}{4}$ 得

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

解聯立方程式，得 $c_1 = c_2 = 2$。 故

$$\{a_n^{(g)}\}_{n=0}^{\infty} = \Big\{2^{-n+1} + n \cdot 2^{-n+1} + n^2 \cdot 2^{-n-1}\Big\}_{n=0}^{\infty}$$

□