DM-05-02 ► 解聯立遞迴關係方程組

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2, & n \geq 0 \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

以及 $a_0 = 0, b_0 = 1$。

【解】 令 (1) 式與 (2) 式如下：

$$a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2 \text{，} n \geq 0 \tag{1}$$

$$b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1 \text{，} n \geq 0 \tag{2}$$

由 (1) 式知，$b_n = 2a_n - a_{n+1} + 2$，代入 (2) 式得

$$2a_{n+1} - a_{n+2} + 2 = -a_n + 2(2a_n - a_{n+1} + 2) - 1$$

經化簡後得下列非齊次二階線性常係數遞迴關係式：

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = -1, \text{ 其中 } n \geq 0 \tag{3}$$

上式之特徵方程式為 $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$，其兩相異特徵根為 $\alpha_1 = 1$ 及 $\alpha_2 = 3$。
因此齊次部份之一般解為 $a_n^{(h)} = c_1 \cdot (1)^n + c_2 \cdot (3)^n$。
設 $a_n^{(p)} = d_1 + d_2 n$ 為 (3) 式的一個解，則

$$d_1 + d_2(n+2) - 4[d_1 + d_2(n+1)] + 3(d_1 + d_2 n) = -1$$

解得 $d_2 = \frac{1}{2}$。故 $a_n^{(p)} = d_1 + \frac{1}{2}n$ 為 (3) 式之特殊解。因此

$$a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 + c_2 \cdot (3)^n + d_1 + \tfrac{1}{2}n = e + c_2 \cdot (3)^n + \tfrac{n}{2}, \text{ 其中 } n \geq 0$$

為 (3) 式之一般解，其中 $e = c_1 + d_1$ 與 c_2 為兩個任意常數。

另外，將 $a_0 = 0$ 及 $b_0 = 1$ 代入 (1) 式得 $a_1 = 2 \cdot 0 - 1 + 2 = 1$。
因此 $\{a_n^{(g)}\}_{n=0}^{\infty}$ 之前兩項初始條件為

$$\begin{cases} a_0 = e + c_2 = 0 \\ a_1 = e + 3c_2 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

解聯立方程式，得 $e = -\frac{1}{4}$ 及 $c_2 = \frac{1}{4}$。故

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(3)^n + \frac{n}{2}\}_{n=0}^{\infty}$$

因為 $b_n = 2a_n - a_{n+1} + 2$，將上式代入得

$$b_n = 2[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(3)^n + \frac{n}{2}] - [-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(3)^{(n+1)} + \frac{n+1}{2}] + 2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(3)^n + \frac{n}{2}$$

故

$$\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}(3)^n + \frac{n}{2}\}_{n=0}^{\infty}$$

□

劉季昌提供