DM-05-04 ► (a) 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0, & n \geq 2 \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 0 \end{cases}$$

(b) 若將 (a) 中之起始條件改為 $a_0 = a_3 = 0$ 是否能解？
(c) 若起始條件為 $a_0 = 1$ 及 $a_3 = 2$ 是否能解？

【解】 (a) 特徵方程式為 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$，因此 $\alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 與 $\alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 為二特徵根。
故遞迴式之一般解為

$$a_n = c_1 \cdot (\alpha_1)^n + c_2 \cdot (\alpha_2)^n = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n, \quad n \geq 1$$

其中 c_1 與 c_2 為複數常數。 因 $\cos\frac{\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$， $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，前述遞迴式之一般解亦可表示如下：

$$a_n = c_1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n + c_2 \cdot \left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)^n, \quad n \geq 1$$

由隸美佛公式 (DeMoivre's Theorem) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ 得

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + c_2 \cdot \left(\cos\frac{-n\pi}{3} + i\sin\frac{-n\pi}{3}\right) \\ &= c_1 \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + c_2 \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \\ &= (c_1 + c_2) \cdot \cos\frac{n\pi}{3} + (c_1 - c_2)i \cdot \sin\frac{n\pi}{3} \\ &= k_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} + k_2 \cdot \sin\frac{n\pi}{3} \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $k_1 = c_1 + c_2$ 且 $k_2 = (c_1 - c_2)i$。代入起始條件 $a_1 = 1$ 與 $a_2 = 0$ 得

$$\begin{cases} k_1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + k_2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}k_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 = 1 \\ k_1 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + k_2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}k_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 = 0 \end{cases}$$

解聯立方程式得 $k_1 = 1$ 與 $k_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$。即

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ (c_1 - c_2)i = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

再次解聯立方程式得 $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i$ 且 $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i$。
故

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^n + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

(2) 考慮 $a_0 = a_3 = 0$ 代入 (1) 式得

$$\begin{cases} k_1 \cdot \cos 0 + k_2 \cdot \sin 0 = k_1 = 0 \\ k_1 \cdot \cos \pi + k_2 \cdot \sin \pi = -k_1 = 0 \end{cases}$$

因此 $k_1 = 0$ 且 k_2 為任意數。故 $a_n = k \cdot \sin \frac{n\pi}{3}$，其中 k 為任意數。換言之，非連續的兩個起始條件並不足以決定此一遞迴關係式的唯一解。

(3) 考慮 $a_0 = 1$ 與 $a_3 = 2$ 代入 (1) 式得

$$\begin{cases} k_1 \cdot \cos 0 + k_2 \cdot \sin 0 = k_1 = 1 \\ k_1 \cdot \cos \pi + k_2 \cdot \sin \pi = -k_1 = 2 \end{cases}$$

顯然此一聯立方程式無解。換言之，當起始條件為 $a_0 = 1$ 與 $a_3 = 2$ 時，遞迴關係式無法求得其解。

□

劉季昌提供