DM-05-06 ► 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n = (n-1)\cdot(a_{n-1}+a_{n-2}), & n \ge 2 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

【解】 由 (1) 式知，當 $n \ge 2$ 時

$$a_n - na_{n-1} = -\Big(a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}\Big)$$

令 $b_n = a_n - na_{n-1}$，則上式可寫成 $b_n = -b_{n-1}$。由起始條件 $a_0 = 1$ 與 $a_1 = 0$ 可求得 $b_1 = -1$。故有下列一階齊次線性常係數遞迴關係式：

$$\begin{cases} b_n + b_{n-1} = 0, & n \ge 2 \\ b_1 = -1 \end{cases} \tag{2}$$

(2) 式之特徵方程式為 $\alpha + 1 = 0$，特徵根為 $\alpha = -1$。
令 $b_n = c(-1)^n$，代入 $b_1 = -1$，解得 $c = 1$。
因此，當 $n \ge 1$ 時 $a_n - na_{n-1} = b_n = (-1)^n$ 成立。 故，原題之遞迴關係式亦可表示如下:

$$\begin{cases} a_n = na_{n-1} + (-1)^n & n \ge 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

根據上式可以計算 a_n 數列之前幾項如下：

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1\cdot a_0 - 1 = 0 \\
a_2 &= 2\cdot a_1 + 1 = 1 \\
a_3 &= 3\cdot a_2 - 1 = 3\cdot 1 - 1 = 3 - 1 \\
a_4 &= 4\cdot a_3 + 1 = 4\cdot(3-1) + 1 = 4\cdot 3 - 4 + 1 \\
a_5 &= 5\cdot a_4 - 1 = 5\cdot(4\cdot 3 - 4 + 1) - 1 = 5\cdot 4\cdot 3 - 5\cdot 4 + 5 - 1 \\
a_6 &= 6\cdot a_5 + 1 = 6\cdot(5\cdot 4\cdot 3 - 5\cdot 4 + 5 - 1) + 1 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 - 6\cdot 5\cdot 4 + 6\cdot 5 - 6 + 1 \\
&= \frac{6!}{2!} - \frac{6!}{3!} + \frac{6!}{4!} - \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{6!}
\end{aligned}$$

下面我們利用數學歸納法證明 $a_n = n!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\Big)$ 對所有 $n \ge 2$ 均成立。
假設 $k \ge 2$ 為一整數，且 $a_k = k!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{k!}\Big)$ 成立。則

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= (k+1)\cdot a_k + (-1)^{k+1} \\
&= (k+1)\cdot k!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{k!}\Big) + (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(k+1)!} \\
&= (k+1)!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{(k+1)!}\Big)
\end{aligned}$$

故

$$\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \Big\{n!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\Big)\Big\}_{n=2}^{\infty}$$

□

劉季昌提供