DM-05-07 ► (a) 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, & n \geq 0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

(b) 利用 (a) 解遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2} + \sqrt{a_{n-3} + \sqrt{\cdots}}}}, & n \geq 1 \\ a_0 = 4 \end{cases}$$

【解】 (a) 將等式 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ 兩邊取對數得

$$\log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 a_n)$$

經移項後得下列非齊次一階常係數遞迴關係式：

$$\begin{cases} \log_2 a_{n+1} - \frac{1}{2}\log_2 a_n = \frac{1}{2}, & n \geq 0 \\ a_0 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

令 $b_n = \log_2 a_n$ 代入 (1) 式。則可以得到下列線性遞迴關係式：

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}, & n \geq 0 \\ b_0 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

上式之特徵方程式為 $\alpha - \frac{1}{2} = 0$，其特徵根為 $\alpha = \frac{1}{2}$。
因此齊次部份之一般解為 $b_n^{(h)} = c_1 \cdot (\frac{1}{2})^n$。

設 $b_n^{(p)} = d_1$ 為 (2) 式的一個解，則

$$d_1 - \frac{1}{2}d_1 = \frac{1}{2}$$

解得 $d_1 = 1$。故 $b_n^{(p)} = 1$ 為 (2) 式之特殊解。因此

$$b_n^{(g)} = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = c_1 \cdot (\tfrac{1}{2})^n + 1, \text{ 其中 } n \geq 0$$

為 (2) 式之一般解，其中 c_1 為任意常數。
代入起始條件 $b_0 = 0$，得 $b_0 = c_1 \cdot (\frac{1}{2})^0 + 1 = 0$，因此 $c_1 = -1$。
故

$$\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1 - (\frac{1}{2})^n\}_{n=0}^{\infty}$$

因為 $b_n = \log_2 a_n$ ，代入上式得

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^{1-(\frac{1}{2})^n}\}_{n=0}^{\infty}$$

驗算如下：

$$a_0 = 2^{1-(\frac{1}{2})^0} = 1; \quad a_1 = 2^{1-(\frac{1}{2})^1} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \cdot 1}; \quad a_2 = 2^{1-(\frac{1}{2})^2} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}$$

(b) 由題意

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2} + \sqrt{a_{n-3} + \sqrt{\cdots}}}} \tag{3}$$

知 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 之第 $n-1$ 項為 $a_{n-1} = \sqrt{a_{n-2} + \sqrt{a_{n-3} + \sqrt{a_{n-4} + \sqrt{\cdots}}}}$，將其代入 (3) 式得

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + a_{n-1}} = \sqrt{2a_{n-1}}$$

因此，原題之遞迴關係式可以表示如下：

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, & n \geq 0 \\ a_0 = 4 \end{cases} \tag{4}$$

令 $b_n = \log_2 a_n$ 代入 (4) 式。則可以得到下列線性遞迴關係式：

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}, & n \geq 0 \\ b_0 = 2 \end{cases} \tag{5}$$

由 (a) 部份我們已經知道

$$b_n^{(g)} = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = c_1 \cdot (\tfrac{1}{2})^n + 1,\ \text{其中}\ n \geq 0$$

為 (5) 式之一般解，其中 c_1 為任意常數。
代入起始條件 $b_0 = 2$，得 $b_0 = c_1 \cdot (\frac{1}{2})^0 + 1 = 2$，因此 $c_1 = 1$。
故

$$\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1 + (\frac{1}{2})^n\}_{n=0}^{\infty}$$

因為 $b_n = \log_2 a_n$ ，代入上式得

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^{1+(\frac{1}{2})^n}\}_{n=0}^{\infty}$$

□

劉季昌提供